

НОБЕЛЕВСКАЯ ЛЕКЦИЯ

**ПРИНЦИП МАКСИМИЗАЦИИ
В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ***

Пол А. Самуэльсон

*Paul A. Samuelson. Maximum Principle in Analytical Economics //
The American Economic Review, June 1972, v.62, No.3, p.249–262.*

© Nobel Foundation, 1971

Перевод к.э.н. Н.В.Павлова

Само название предмета моей науки – «экономика» – подразумевает экономию или максимизацию. Однако экономика как наука длительное время развивалась в отрыве от проблем экономики как объекта исследования. Действительно, только в последней трети нашего века, уже в период моей научной деятельности, экономическая теория начала активно претендовать на то, чтобы приносить пользу бизнесмену-практику и государственному чиновнику. Однажды великий представитель предыдущего поколения экономистов, А.Пигу из Кембриджского университета, задал риторический вопрос: «Может ли кому-нибудь прийти в голову нанять экономиста для управления пивоваренным заводом?» Ну, а сегодня самые модные средства экономического анализа, например, исследование операций и теория управления – используются и на государственных, и на частных предприятиях.

Итак, в самой основе нашего предмета заложена идея максимизации. Мой учитель Йозеф Шумпетер как-то метко заметил, что способность человека действовать как «логическое животное», могущее систематически применять эмпирико-индуктивный метод, сама по себе является прямым следствием дарвиновской борьбы за выживание. Подобно тому, как в этой борьбе развился большой палец человека, мозг человека развивается, сталкиваясь с экономическими проблемами. Выказанная за сорок лет до недавних открытий в этологии**, сделанных Конрадом Лоренцем и Николасом Тинбергеном, эта мысль пора-

* Публикуемая работа представляет собой лекцию, прочитанную автором 11 декабря 1970 г. в г. Стокгольме (Швеция) на церемонии вручения ему Нобелевской премии по экономике. В текст лекции автором были внесены небольшие изменения и дополнения. (Прим. ред.)

** Наука о поведении животных. (Прим. ред.)

жает своей глубиной. Не желая выходить за пределы темы моей лекции, я все же упомяну о более поздней точке зрения, высказанной Шумпетером в работе, в которой он представил читателю новую научную дисциплину – эконометрику (Schumpeter, 1933). Шумпетер писал, что количество изучается физиками и другими учеными-естественниками на довольно поздней, зрелой стадии развития их научных дисциплин. И раз уж количественный подход оказывается в распоряжении ученых, то тем больше чести последователям Галилея и Ньютона, использующим математические методы. Однако в экономике, как говорил Шумпетер, сам предмет исследования выступает в количественной форме: уберите численные значения цен или пропорции бартерных обменов – и у вас просто ничего не останется. Счетоводство не использует арифметику, оно само есть арифметика. Ведь на ранней стадии своего развития, согласно Шумпетеру, арифметика была именно счетоводством, точно так же, как геометрия сводилась к землемерным работам.

Я вовсе не хочу создавать у вас впечатление, что экономический анализ использует принцип максимизации прежде всего в связи с необходимостью написания учебников для тех, кто должен профессионально принимать решения. Еще до того, как экономическая наука стала выступать с практическими рекомендациями, мы, экономисты, уже занимались проблемами максимума и минимума. В доминировавшем в течение сорока лет после 1890 г. трактате Альфреда Маршалла «Принципы экономической науки»* большое внимание было уделено проблеме оптимального объема производства, при котором чистая прибыль достигает максимума. Но задолго до Маршалла, в 1838 г., О. Курно в своем классическом труде «Исследования математических принципов в теории богатства» применил аппарат дифференциального исчисления к изучению проблемы нахождения объема производства, обеспечивающего максимум прибыли. Вопрос о минимизации затрат также был поставлен более ста лет тому назад. По крайней мере, им занимался фон Тюнен при рассмотрении понятия предельной производительности.

Сейчас модно говорить о кризисе идентичности. Необходимо избегать ошибок, подобных той, которую допустил Эдвард Гиббон, когда он писал свой труд «История упадка и разрушения Римской империи». Гиббон, как говорили тогда, порой путал себя с Римской империей. В современном театре часто стирается граница между наблюдающими зрителями и играющими актерами, а в современной науке – между наблюдающими учеными и выступающими в качестве объекта наблюдения подопытными морскими свинками (или атомами в квантовой механике). Что касается значения принципов максимума в естественных науках, то я покажу, что отвесная траектория падающего яблока и эллиптическая орбита вращающейся планеты могут быть представлены в виде оптимального решения некоторой специфической задачи математического программирования. Однако вряд ли кто-либо поддастся искушению надеть яблоко или планету свободой выбора и способностью к сознательной минимизации. Тем не менее утверждение о том, что шарик Галилея скатывается по наклонной плоскости, как бы ми-

* Русский перевод этой книги, вышедший в 1982 г. в издательстве «Прогресс», был необоснованно озаглавлен «Принципы политической экономии». (Прим. ред.)

нимизируя интеграл действия или интеграл Гамильтона, представляет ценность для физиков-наблюдателей, стремящихся сформулировать предсказуемые закономерности, присущие явлениям природы.

Почему же ученый находит полезной возможность связать позитивное описание реального поведения с решением задачи максимизации? Этим вопросом я много занимался в начале своей научной деятельности. Со времени своих первых статей, посвященных «выявленным предпочтениям» (Samuelson, 1938a, 1938b, 1948, 1953), и до завершения «Основ экономического анализа» (Samuelson, 1947) я находил эту тему увлекательной. Ученый, как и домашняя хозяйка, никогда не ощущает, что его работа закончена. В последнее время я работаю над очень трудной проблемой анализа стохастической спекулятивной цены. Интересно, например, как изменяются цены на какао на биржах Лондона и Нью-Йорка (Samuelson, 1971). Столкнувшись при этом с неудобоваримой системой нелинейных разностных уравнений и неравенств, я было отчаялся найти в математической литературе доказательство хотя бы существования решения. Но неожиданно проблема облегчилась, когда, роаясь в своей памяти, я вспомнил, что мои дескриптивные соотношения могут интерпретироваться как необходимые и достаточные условия вполне определенной задачи о максимуме. Однако я забегаю слишком далеко вперед, если сразу же создам у вас впечатление, что принципы максимума имеют ценность просто как удобная подпорка для аналитика. Семьдесят лет назад, когда был учрежден Нобелевский фонд, непревзойденной популярностью пользовались взгляды Эрнста Маха¹. Мах, как вы помните, говорил, что цель научной деятельности заключается в «экономном» описании природы. Он вовсе не хотел этим сказать, что создать свою систему мира Ньютона побудила необходимость разработать основы навигации для обеспечения безопасного мореплавания торговых судов. Скорее он имел в виду, что хорошее объяснение – это простое объяснение, которое легко запомнить и которое увязывается с большим разнообразием наблюдаемых явлений. Было бы ошибкой в духе Гиббона иллюстрировать это деистическими взглядами Мопертюи, в соответствии с которыми законы природы телеологичны. Мах вовсе не говорил, что Мать-Природа – экономист, он лишь утверждал, что ученый, формулирующий законы, которые описывают наблюдаемые явления, в сущности выступает как экономист или просто ведущий себя экономично человек.

Я должен отметить, что эти различные роли почти по случайному стечению обстоятельств действительно тесно связаны. Часто физику удастся найти лучшее, более экономичное описание явлений природы, если он способен сформулировать наблюдаемые законы, используя принцип максимума. Экономист часто может получить лучшее, более экономичное описание экономического поведения, используя тот же инструментарий.

¹ Вне зависимости от ценности концепций Маха с современной точки зрения, мы должны быть благодарны ему за ту роль, которую его идеи сыграли в создании Эйнштейном специальной теории относительности. Хотя с годами Эйнштейн и стал отвергать методологию Маха, это не может подорвать ее репутацию.

Позвольте мне проиллюстрировать это некоторыми очень простыми примерами. Падение Ньютонова яблока может быть описано двумя способами: оно падает на землю с постоянным ускорением; или его положение как функция времени изменяется вдоль кривой, которая минимизирует (от момента начала падения до момента наблюдения) интеграл функции, представляющей собой квадрат мгновенной скорости минус линейная функция положения. «Как, – скажете вы, – Вы серьезно считаете, что второе объяснение является простым?» Я не буду с этим спорить, замечу только, что для математически подкованного физика выражение

$$\delta \int_0^T \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - gx \right) dt = 0$$

не более сложно, чем $\ddot{x} = -g$; и он знает, что формулировка принципа Гамильтона в вариационной форме обладает великими мнемоническими свойствами, когда речь идет о переходе от одной системы координат к другой.

Хотя я не физик и не думаю, что многие из моих слушателей – физики, позвольте мне привести более наглядный пример полезности принципа минимума в физике. Свет перемещается в воздухе из одной точки в другую по прямой линии. Подобно случаю с падающим яблоком, это перемещение может быть описано в виде решения задачи вариационного исчисления на нахождение минимума. Но рассмотрим теперь, как свет отражается, попадая на зеркало. Вы можете увидеть и запомнить, что угол падения равен углу отражения. Более наглядным средством, облегчающим понимание этого факта, является принцип наименьшего времени Ферма, который был известен уже Герону и другим ученым Древней Греции. Приведенный ниже чертеж, на котором указаны равные треугольники, говорит сам за себя (см. рис. 1).

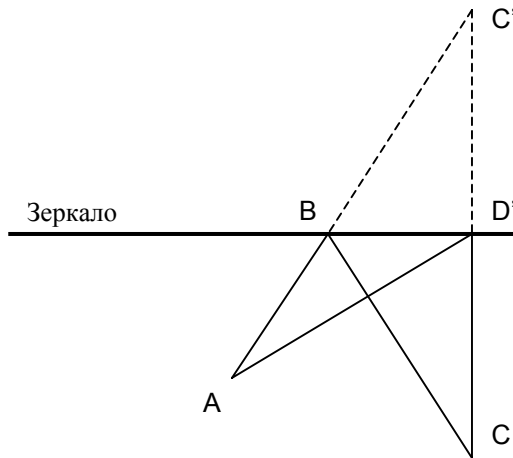


Рис. 1.

Если длина отрезка ABC' явно меньше длины ломаной ADC' , то очевидно, что путь ABC (равный ABC') короче и занимает меньше времени, чем любой другой путь, например, путь ADC .

Вы вправе утверждать, что, хотя представление в виде минимума является удобным, оно ничем не лучше другого. Но пойдите после этой лекции в свою ванную комнату и посмотрите на свое отражение, опустив в воду большой палец ноги. Ваши конечности больше не будут выглядеть прямыми, поскольку скорость распространения света в воде отличается от скорости его распространения в воздухе. Принцип наименьшего времени дает вам ключ к описанию поведения света в таких условиях, а знание закона Снелла об углах – нет. Кто теперь может сомневаться относительно того, какое из двух научных объяснений лучше?

ПРИМЕР ИЗ ОБЛАСТИ ЭКОНОМИКИ

Позвольте мне показать то же самое применительно к экономике, взяв в качестве примера простейший случай. Рассмотрим фирму, стремящуюся к максимизации своей прибыли, которая продает продукцию в соответствии с кривой спроса, причем цена является невозрастающей функцией продаваемого количества. Предположим далее, что для выпуска продукции необходимо затратить один, два или девятью девять видов различных ресурсов. Ради простоты будем считать, что производственная функция, связывающая объемы затрат и выпуска, является гладкой и вогнутой.

Экономист, мыслящий в стиле Маха, будучи ученым-позитивистом, заинтересованным попросту в регистрации и систематизации наблюдаемых фактов, мог бы, в принципе, перенести на перфокарты информацию о 99 функциях спроса, связывающих количество каждого ресурса, покупаемого фирмой, с 99 переменными, отражающими цены на ресурсы. Какой колоссальной задачей было бы хранение массивов информации, определяющих 99 различных поверхностей в стомерном пространстве! Однако на самом деле 99 поверхностей не являются независимыми. В действительности, достаточно знать единственную «родительскую» поверхность, для того чтобы иметь возможность получить путем расчетов точную информацию о 99-и «детях». Каким же образом становится возможной такая громадная экономия в описании? Да в силу того факта, что наблюдаемые кривые спроса, которые великий шведский экономист предпоследнего поколения Густав Кассель считал неделимыми атомами в теоретическом арсенале экономиста, в действительности являются решениями задачи максимизации прибыли! При обычных условиях регулярности эти решения представляют собой функции, обратные семейству частных производных функции совокупного дохода, который определяется как произведение объема продукции (при данных объемах затрат всех ресурсов) на цену спроса, по которой эта продукция будет продана. При условиях гладкости и строгой вогнутости эта «родительская» функция дохода имеет своими детьми матрицу частных производных второго порядка размерности 99×99 , которая является симметричной и отрицательно определенной. Легко доказать, что эти функции могут быть однозначно обращены в форму нового семейства «детей» с теми же самыми свойствами. 99 таких детей не могут не иметь родительской функции, ко-

тору, если бы она никогда не существовала, мы должны бы были создать подобно Пигмалиону.

Математически это выглядит так:

$$(1) \underset{\{v_i\}}{MAX} \left[R(v_1, \dots, v_{99}) - \sum_1^{99} p_j v_j \right] = R(v_1^*, \dots, v_{99}^*) - \sum_1^{99} p_j v_j^* = \\ = -H(p_1, \dots, p_{99})$$

где $R(v_1, \dots, v_{99}) = Q(v_1, \dots, v_{99})P[Q(v_1, \dots, v_{99})]$ – гладкая, строго вогнутая «регулярная» функция дохода. Необходимыми условиями максимума будут

$$(2) \partial R(v_1^*, \dots, v_{99}^*) / \partial v_i = p_i, (i=1, \dots, 99).$$

Если, кроме того, матрица Гесса вторых частных производных является отрицательно определенной, то уравнений (2) достаточно для максимума. Отсюда вытекают обратные соотношения, которые могут интерпретироваться как частные производные сопряженной функции Хотеллинга-Роя H , а именно:

$$(3) v_i^* = \partial H(p_1, \dots, p_n) / \partial p_i, (i=1, \dots, 99).$$

Отсюда следует, что при

$$\sum \Delta v_j^2 \neq 0 \neq \sum \Delta p_j^2$$

наши переменные удовлетворяют неравенству

$$(4) \Delta p_1 \Delta v_1 + \Delta p_2 \Delta v_2 + \dots + \Delta p_{99} \Delta v_{99} < 0.$$

Можно сказать и больше. Хотя мне трудно представить себе характер поверхностей даже в трехмерном пространстве, я могу уверенно заявить на основе вышесказанного, что повышение цены на любой ресурс при сохранении остальных цен постоянными определенно приведет к снижению спроса на этот ресурс со стороны фирмы, то есть $\partial v_i / \partial p_i < 0$. Такой банальный результат мог бы предвидеть любой, кто вникнет в ситуацию и спросит себя: «Предположим, я был бы последним простаком среди предпринимателей. Что я стал бы делать, чтобы сохранить по возможности большую прибыль в случае подорожания одного из ресурсов?»

Здесь здравый смысл и высшая математика оказываются в согласии. Однако все мы знаем о парадоксе Гиффена, в соответствии с которым повышение цены на картофель – основную еду бедных ирландских крестьян – может снизить их жизненный уровень настолько, что заставит покупать скорее больше, чем меньше картофеля. В этом случае сам здравый смысл обнаруживается только под прожектором математики.

С помощью математики я могу видеть свойство 99-мерных поверхностей, скрытое от простого глаза. Если повышение цены удобрений (только их одних) всегда приводит к увеличению закупок некой фир-

мой черной икры, то из одного этого факта я могу предсказать результат следующего эксперимента, который никогда не проводил сам и по которому не располагаю никакими данными наблюдений: повышение цены на одну только икру приведет к росту закупок фирмой удобрений. В термодинамике такие условия взаимности или интегрируемости известны как условия Максвелла. В экономике они известны как условия Хотеллинга – в честь Гарольда Хотеллинга, сформулировавшего их в 1932 г. (Hotelling, 1932).

Одна из привлекательных сторон научной деятельности состоит в том, что мы все карабкаемся на небеса на плечах своих предшественников. Экономика, подобно физике, имеет своих героев, и букву «Н» я использовал в своих математических уравнениях не в честь сэра Уильяма Гамильтона (Hamilton), а скорее в честь Гарольда Хотеллинга. Ведь именно его работа столь сильно вдохновляла меня, когда я начинал свою карьеру. Примерно в это же время покойный Генри Шульц пытался эконометрическими методами проверить соответствие условий интегрируемости Хотеллинга эмпирическим данным (Schultz, 1938).

Имеются еще и другие предсказуемые условия определенности, касающиеся того, насколько описанные «перекрестные эффекты» должны быть слабыми по сравнению с «собственными эффектами» повышения цен, однако я не буду отнимать у аудитории время на их обсуждение. Упомяну лишь об одном условии: знаки всех главных миноров должны чередоваться.

В качестве последней иллюстрации черной магии, посредством которой формула максимума позволяет получить четкие выводы относительно сложной системы с большим числом переменных, позвольте напомнить о работах, в которых я сформулировал и обобщил принцип, известный в физике как принцип Ле Шателье (Samuelson, 1947, 1958, 1960a). Этот принцип был обнаружен почти сто лет тому назад французским физиком, который занимался термодинамикой, развивая в ней направление, связанное с именем Гиббса. Принцип не отличается большой ясностью. Третью веку тому назад, когда я зачитывался различными трактатами по физике, мое математическое ухо не могло различить, какую мелодию в них играют. Если вы сегодня возьмете большинство книг по физике, возможно, вас постигнет та же участь. Обычно в них используются невразумительные телеологические аргументы. Например, можно прочесть нечто подобное: «Если вы наложите внешнее ограничение на систему, находящуюся в равновесии, то она перейдет в новое состояние равновесия, позволяющее поглотить изменение» (или «противодействовать ему», или «подстроиться под него», или «минимизировать его»).

В свое время я был поражен замечанием, сделанным одним из моих преподавателей в Гарварде Эдвином Бидвеллом Уилсоном. Уилсон учился у Уилларда Гиббса в Йеле и плодотворно работал во многих областях математики и физики. Его учебник высшей математики использовался как стандартное пособие в течение десятилетий. Ему принадлежит капитальная доработка лекций Гиббса по векторному анализу. Он написал один из первых учебников по аэродинамике. Он был другом Р.А.Фишера и экспертом по математической статистике и демографии. Наконец, он рано заинтересовался работами Парето и стал

читать лекции по математической экономике в Гарварде. Моя более ранняя формулировка неравенства (4) появилась в значительной мере благодаря лекциям Уилсона по термодинамике. В частности, на меня сильное впечатление произвело его заявление, что тот факт, что повышение давления сопровождается уменьшением объема, – не столько теорема о системе термодинамического равновесия, сколько математическая теорема о вогнутых вверх поверхностях или отрицательно определенных квадратичных формах. Вооружившись этими сведениями, я вознамерился осмыслить принцип Ле Шателье.

Позвольте мне привести общепринятую формулировку этого принципа. «Сожмите резиновый шар, и его объем уменьшится. Сравните, однако, как сокращается его объем при двух разных условиях эксперимента. Сначала представьте себе, что его поверхность изолирована от окружающего мира, так что так называемая порожденная теплота не может теряться. Во втором случае снова сожмите резиновый шар, однако пусть его температура уравнивается с температурой в помещении. Тогда, в соответствии с принципом Ле Шателье, сокращение объема в случае, когда система изолирована, будет меньшим, чем во втором случае, когда температура в конце концов станет постоянной». Более круто нисходящая кривая (тонкая линия) на рис. 2 показывает связь между давлением, откладываемым по вертикальной оси, и объемом, откладываемым по горизонтальной оси, которая превалирует при увеличении давления в условиях изоляции. Более пологая кривая (жирная линия), проходящая через ту же точку А, показывает связь давления и объема при изотермическом изменении. Сущность принципа Ле Шателье заключается именно в том, что тонкая кривая должна быть более крутой чем жирная кривая. Используя принятые в термодинамике обозначения, можно записать:

$$(5) \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t \leq \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \leq 0,$$

где индекс t означает постоянство температуры, а s показывает, что речь идет об изолированном (адиабатическом или изэнтропическом) изменении.

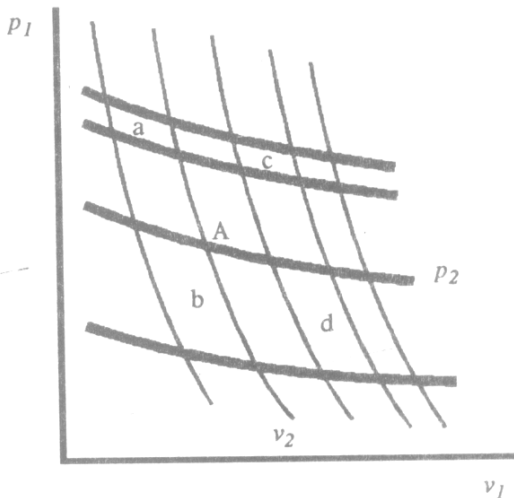


Рис. 2.

Но какое отношение все это имеет к экономике? Воистину, нет более трагической фигуры, чем экономист или бывший инженер, пытающиеся вымучивать аналогии между понятиями физики и экономики. Сколько же довелось мне прочесть скучнейших страниц, на которых автор занимался поиском в экономике чего-то такого, что соответствует энтропии или тому или иному виду энергии! Бессмысленные «законы», такие, как «закон сохранения покупательной способности», представляют собой сомнительное подражание важному физическому закону сохранения энергии. А когда экономист ссылается на принцип неопределенности Гейзенберга применительно к миру социальных явлений, это в лучшем случае следует рассматривать как оборот речи или как игру слов, а не как правомерное применение соотношений квантовой механики.

Однако если в качестве примера максимизирующей системы вы возьмете фирму-монополиста, использующую 99 видов ресурсов, то окажется, что можно увязать ее структурные связи с теми, которые преобладают в термодинамической системе, максимизирующей энтропию. Давление и объем, а для данного случая – абсолютная температура и энтропия, связаны друг с другом тем же отношением сопряженности или двойственности, что и ставка заработной платы с количеством труда или земельная рента с земельной площадью. Рис. 2 теперь может выполнять двойную службу, описывая экономические связи в точности так же, как он описывал связи термодинамические. Теперь по вертикальной оси откладывается p_1 – цена первого ресурса. По горизонтальной оси откладывается объем этого ресурса v_1 . Здесь можно говорить о системе с 99 переменными, но я надеюсь, что вы простите мне, если я буду рассматривать более простой случай двух переменных, скажем, труда и земли.

Как и в случае резинового шара, мы представим себе эксперимент при двух различных условиях. В первом случае мы повышаем цену первого ресурса (труда) p_1 , зафиксировав на постоянном уровне объем второго ресурса (земли) v_2 , как, например, в краткосрочном случае, рассмотренном Маршаллом, когда может меняться только предложение труда.

Наклон тонкой кривой, проходящей через точку А, показывает, что рост p_1 влечет за собой снижение v_1 .

Во втором случае мы повысим p_1 на ту же величину, но сохраним на прежнем постоянном уровне p_2 . И снова у монополиста, максимизирующего прибыль, в качественном плане может быть лишь одна реакция: будет закуплен меньший объем v_1 , как это показывает отрицательный наклон жирной кривой, проходящей через точку А. Теперь можно сформулировать некое утверждение, которое можно назвать принципом Ле Шателье–Самуэльсона: жирная кривая долгосрочного приспособления при постоянной цене второго ресурса (и конечно, при объеме закупок второго ресурса, *mutatis mutandis* измененном так, чтобы восстановить равновесие, отвечающее максимуму прибыли) должна иметь менее крутой наклон или большую эластичность, чем тонкая кривая, описывающая реакцию со стороны спроса, когда объем затрат второго ресурса зафиксирован. Математически это означает, что

$$(6) \left(\frac{\partial v_1}{\partial p_1}\right)_{p_2} \leq \left(\frac{\partial v_1}{\partial p_1}\right)_{v_2} \leq 0.$$

Я включил знаки равенства, чтобы учесть случай, когда объемы потребления двух ресурсов в производстве могут быть полностью независимыми. В этом соотношении примечательно то, что указанные неравенства будут выполняться вне зависимости от того, будут ли эти два ресурса взаимными дополнителями, как, например, насосы для распыления удобрений и инсектициды, или субститутами, такими, как органические и минеральные удобрения. Если это заинтересует слушателя, он может попробовать провести интуитивную проверку данного утверждения в указанных противоположных случаях.

Принцип Ле Шателье находит разнообразное применение не только в теории производства, но и в общей теории ограниченного рационального.

ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

Сказанное выше подводит меня к теории потребительского спроса. В отличие от только что рассмотренной ситуации, когда максимизируется прибыль, здесь мы имеем дело с финансовым ограничением, в пределах которого определяется максимум. До середины 30-х годов теория полезности обнаруживала признаки вырождения в бесплодные тавтологии. Психологически понимаемую полезность или удовлетворенность вряд ли можно было определить, не говоря уже о том, чтобы ее измерить. Экономисты австрийской школы настаивали, что люди максимизируют полезность, но, столкнувшись с необходимостью дать ей определение, тавтологично заявляли, что, как бы люди себя ни вели, они, вероятно, получали максимум удовлетворенности, ибо в противном случае они вели бы себя иначе. Точно так же как мы можем сократить на два дробь, у которой числитель и знаменатель – четные, можно было бы, используя принцип «бритвы Оккама»*, полностью вынести за рамки понятия полезности и привести это длинное рассуждение к бессмысленной формулировке: «Люди делают то, что они делают».

Я не слишком преувеличиваю. Правда, русский ученый Слуцкий (Slutsky, 1915) в 1915 г. вышел за эти пределы, но его работа, опубликованная в итальянском журнале, осталась незамеченной в хаосе событий первой мировой войны. В более известной работе Парето (Pareto, 1907, 1909) недоставало математического аппарата вейерштрассовой теории условного экстремума. Двумерный анализ кривых безразличия был проведен У.Джонсоном, кембриджским логиком, учившимся с Маршаллом и Уайтхедом. Он, как полагают, оказал влияние на работы по теории вероятностей Дж.М.Кейнса (Keynes, 1921), Фрэнка Рамсея (Ramsey, 1931) и сэра Гарольда Джеффриса (Jeffreys, 1939). Там не менее, когда я начинал свою научную деятельность, лидирующее положение в разработке теории поведения потребителей занимали сэр Рой Аллен и сэр Джон Хикс (Hicks and Allen, 1934) в Лондонской школе экономики и Генри Шульц – в Чикаго, а работы Слуцкого оставались неизвестными.

* Оккам, Уильям (1285–1349) – английский философ-схоласт. Принцип «бритвы Оккама» гласит: «Сущности не следует множить без необходимости», то есть понятия, не сводимые к интуитивному знанию и не поддающиеся проверке в опыте, должны быть удалены из науки. (Прим. ред.)

С самого начала я стремился установить, какие фальсифицируемые гипотезы* относительно наблюдаемых цен и размеров спроса вытекают из предположения, что потребитель тратит свои ограниченные доходы при данных ценах так, чтобы максимизировать свою относительную полезность (то есть сравнивая варианты по принципу «лучше – хуже» и не приписывая этим «лучше – хуже» никаких числовых значений). Не вдаваясь в подробности, скажу, что идея «выявленного предпочтения» пришла ко мне внезапно в ходе спора с одним из моих учителей, как это бывало со многими из моих лучших идей. Узнав от Леонтьева о кривых безразличия, я нашел им применение в следующем году в курсе международной торговли Хаберлера. Когда он стал возражать против постулирования мною выпуклых кривых безразличия, я неожиданно для себя самого ответил на это: «Ну, если они вогнутые, то индексы Ласпейраса–Пааше в вашей докторской диссертации ничего не стоят»². Далекое от того, чтобы означать *reductio ad absurdum*, это предложение по зрелом размышлении, подсказало, как исследователь мог бы опровергнуть гипотезу о максимизирующем поведении посредством проверки ее в наблюдаемых ситуациях с двумя товарами и ценами. После этого осталось только разработать детали теории выявленного предпочтения.

Моя ранняя теория выявленного предпочтения сама по себе была совершенно адекватной для исследования проблем с двумя потребительскими товарами. Я продолжал считать, что если мы устраним аналогичные проблемы для выбора из более чем двух ситуаций³, то можно было бы устранить феномен «неинтегрируемости» поля безразличия.

В ситуации, подобной данной, когда докладчик обычно уж слишком склонен к перечислению своих научных побед, особенно полезно почаще делать паузы, чтобы вспомнить поражения и неудачи. Даже с помощью ведущих математиков мира я не смог проверить и доказать истинность вывода, приведенного в последней из сносок, и меня убедили изъять этот материал из опубликованного варианта «Выявленного предпочтения» (Samuelson, 1948). Тем большего почета заслуживает Хендрик Хаутеккер (Houthakker, 1950), который в первой же своей

* П. Самуэльсон опирается здесь на принцип фальсификации, выдвинутый К.Р. Поппером, постулирующий принципиальную опровержимость любого утверждения, относимого к науке. (Прим. ред.)

² Чтобы понять это, представьте себе, что вы максимизируете полезность вашего потребления (Q_x, Q_y, \dots) по ценам (P_x, P_y, \dots), тратя положительный доход $P_x Q_x + \dots = \sum PQ$. Тогда для двух ситуаций ($P^1, Q^1, \sum P^1 Q^1$) и ($P^2, Q^2, \sum P^2 Q^2$) возможность наблюдать одновременно, что $\sum P^1 Q^2 / \sum P^1 Q^1 < 1$ и $\sum P^2 Q^1 / \sum P^2 Q^2 < 1$ противоречит ординалистской максимизации относительной полезности. При варианте \leq вместо $<$, отрицание этой возможности есть одна из форм Слабой аксиомы выявленного предпочтения.

³ Используя обозначения предыдущей сноски, я вывел, что неинтегрируемость могла бы быть устранена в силу следующей аксиомы: « $\sum P^i Q^i > \sum P^i Q^{i+1}$ для всех $i=1, \dots, n-1 \geq 1$ исключает $\sum P^n Q^n > \sum P^n Q^1$ ». При $n=2$ это, в сущности, – повторение Слабой аксиомы; при всех $n \geq 2$ – это Сильная аксиома Хаутеккера.

экономической работе сформулировал Сильную аксиому и доказал, что она исключает неинтегрируемость.

В 1950 г. я сделал обзор дискуссии по интегрируемости, вернувшись к Парето, к началу века, и еще дальше – к классической диссертации Ирвинга Фишера (1892) (см.: Fisher, 1925), и даже еще дальше – к извлеченной из забвения работе малоизвестного Антонелли (Antonelli, 1886). В середине 30-х годов, когда я выступил со своей идеей, проблема интегрируемости находилась в настолько неопределенном состоянии, что работавшие в тесном сотрудничестве уже упомянутые сэр Джон Хикс и сэр Рой Аллен резко расходились во взглядах на этот предмет. Теперь, когда осознаны эмпирические проявления неинтегрируемости, большинство теоретиков склонны постулировать интегрируемость. Как пояснить ее смысл? Мой добрый друг Николас Джорджеску-Роеген, из классической работы которого я почерпнул так много тонких замечаний относительно проблемы интегрируемости (Georgesku-Roegen, 1936), стал бы доказывать, что невозможно выразить одними лишь словами столь сложные математические соотношения. Я же придерживаюсь противоположного взгляда, потому что математика – это язык и, в принципе, то, что может постигнуть один простофиля, может постигнуть и другой. Поэтому позвольте мне отослать вас к рис. 2, благодаря которому я могу дать широкую интерпретацию условий интегрируемости для рассмотренной нами фирмы, максимизирующей прибыль и использующей 99 видов ресурсов.

Круто ниспадающие кривые на диаграмме представляют собой функции спроса на первый ресурс v_1 при ценах p_1 , когда количество всех остальных ресурсов остается ограниченным, как в краткосрочном периоде у Маршалла. Жирные и более пологие кривые также представляют собой функции спроса на тот же ресурс v_1 при ценах p_1 , но при условии, что цены всех остальных факторов заморожены. Если бы кто-то предложил мне объяснить, что означает интегрируемость, но не позволил бы при этом использовать язык частных производных, я бы мог проиллюстрировать это свойством пропорциональности площадей на рис. 2. Я могу сказать, что идея такого предложения применительно к экономике пришла мне в голову в связи с некоторыми любительскими изысканиями в термодинамике. Читая чудесно написанное введение в термодинамику Клерка Максвелла, я обнаружил (Samuelson, 1960), что его объяснение существования одной и той же шкалы абсолютной температуры в каждом теле могло бы быть верным только в том случае, если на p - v -диаграмме, на которую я ранее ссылался в связи с принципом Ле Шателье, два семейства кривых – круто ниспадающие, тонкие, и более полого ниспадающие, жирные, – образуют параллелограммы наподобие a, b, c, d на рис. 2, такие, что

$$[\text{площадь a}]/[\text{площадь b}]=[\text{площадь c}]/[\text{площадь d}].$$

Так же обстоит дело и с двумя различными экономическими кривыми. Именно вследствие условий интегрируемости Хотеллинга, которые связывают вместе 99 различных функций спроса на факторы, отмеченные выше площади обладают свойством пропорциональности. Заканчивая рассмотрение этого интересного результата, я хотел бы, с вашего позволения, упомянуть еще, что он остается в силе даже тогда, когда, как и в линейном

программировании, соответствующие поверхности имеют углы и грани, на которых частные производные не определены однозначно.

Я бы не хотел заканчивать разговор о максимизации функций, не подчеркнув, что все это не следует воспринимать как всего лишь упражнения в логике и математике⁴. В экономической науке кипят дискуссии о том, стремятся ли корпорации максимизировать свою прибыль. Однако ни одна из спорящих сторон не задается вопросом о том, какое значение для объекта наблюдения имеет наличие или отсутствие той или иной функции, которую он максимизирует. А если выйти за относительно узкие рамки экономики, то я должен признаться, что писания социологов, таких, как Толкотт Парсонс (Parsons, 1949), кажутся мне уж очень пустыми, потому что они, по-видимому, никогда не задаются вопросом о том, какая разница между случаями, когда социальное действие рассматривается

⁴ В своем отклике на публикацию предыдущего варианта данной лекции Роберт Киллингуорт, аспирант Йельского университета, указал, что в физике часто не проводится особого различия между максимумом и минимумом или, для данного случая, между экстремумом какого-либо вида и стационарной точкой перегиба. Я вполне согласен с этим и часто имел случай указывать, что для физика типичным является обращение только к «вариационному» аспекту проблемы (см., например, мою статью о причинности и телеологии в экономике в: Lerner (ed.), 1965, p.99–143, особенно p.128). Так, я могу бросить мяч, чтобы попасть вам по голове, двумя способами: прямой наводкой или бросив его так высоко, чтобы он упал на вас сверху (непрямой наводкой). Первая из траекторий минимизирует интеграл «действия», вторая – нет. Точно так же как природа не терпит пустоты только до уровня давления в 30 дюймов ртутного столба, она оказывается близорукой при нахождении минимума, минимизируя действие лишь на пути до первой сопряженной точки. И в других ситуациях, как, например, в случае с прохождением света, физик на самом деле не верит, что процесс происходит телеологически: он размышляет о световых волнах, распространяющихся от каждой точки во всех направлениях в соответствии с принципом Гюйгенса, и он ожидает, что такие волны будут в различных точках усиливать или нейтрализовывать друг друга. То, что в геометрической оптике видится как луч света, это, попросту места, где волны нейтрализуют друг друга в наименьшей степени. На языке экономики это, скорее, похоже на выдержанные в духе Дарвина рассуждения Армена Алчиана о том, что выживание наиболее приспособленных дает нам феномены, которые выглядят так, как будто порождены проблемой экстремума (Alchian, 1950). Как указал Киллингуорт, ссылаясь на работу А. д'Аспо (d'Aspo, 1939, ch. 18), отсюда вытекает следующее: на моем рис. 1 мы сгибаем зеркало вокруг точки В, сохраняя его наклон в ней, но придавая ему кривизну большую, чем кривизна эллипса, фокусами которого являются А и С. Тогда фактическая траектория, по которой перемещается свет (как это видно, от А к В и затем к С) по длине будет *наибольшей*, а не *наименьшей*. И в других случаях можно представить фактическую траекторию не минимальной и не максимальной, а попросту стационарной точкой перегиба (своего рода седловой точкой). Если приложить некоторое усилие, то, как и выше, можно свести ситуацию к случаю сопряженной точки. Ход рассуждений при этом следующий. Разделите одновременно на два, на четыре и т.д. расстояния от В до А и С до тех пор, пока в конце концов не сможете сказать, что конечная траектория, по которой перемещается свет, действительно представляет собой минимум. Или, в более общем виде, в геометрической оптике для *достаточно близких друг к другу* точек траектории, по которой перемещается свет, соответствующий интеграл Герона–Ферма–Мопертюи действительно принимает *минимальное* значение. Следует подчеркнуть, что в экономической теории важна именно истинная минимизация, так как предполагается, что экономические субъекты с самого начала руководствуются некими целями.

как часть системы, максимизирующей ценность, или когда оно вытекает из «функциональной» интерпретации наблюдаемых феноменов.

ПРОБЛЕМЫ, НЕ СВЯЗАННЫЕ С МАКСИМУМОМ

Мне не хочется выглядеть империалистом и выдвигать претензии на универсальную применимость принципа максимума в теоретической экономике. Есть множество областей, где он просто не применяется. Возьмем для примера мою раннюю работу, посвященную взаимодействию акселератора и мультипликатора (Samuelson, 1939). Это важная тема для макроэкономического анализа. Действительно, как я уже отмечал в другом месте, эта статья чрезмерно подняла мою репутацию. Конечно, тема была фундаментальной, а математический анализ условий устойчивости давал возможность получить изящное решение на уровне, доступном для понимания как толкового начинающего, так и виртуоза математической экономики. Однако оригинальная спецификация модели принадлежит моему гарвардскому учителю Элвину Хансену, а работы сэра Роя Харрода (Harrod, 1936) и Эрика Лундберга (Lundberg, 1937) ясно указали путь к построению этой модели.

Я рассматриваю здесь связь акселератора и мультипликатора потому, что это типичный пример динамической системы, которую ни в каком полезном смысле нельзя связать с проблемой максимума. Обследуя больного, мы узнаем кое-что и о здоровых, а обследуя здоровых, мы можем также узнать что-то и о больных. Тот факт, что проблема «акселератор–мультипликатор» не может быть связана с максимизацией, сильно затрудняет ее анализ. Так, когда один мой коллега был молод, он написал под моим руководством докторскую диссертацию (Eckaus, 1954), обобщив анализ взаимодействия акселератора–мультипликатора для случая многих секторов и многих стран. Это было прекрасное исследование; д-р Эккаус с большой изобретательностью и изяществом выжал из модели все, что можно было выжать. Одновременно он, по-видимому, был первым, кто обнаружил, что отношение величины полезного выпуска к затратам первоклассных интеллектуальных ресурсов было при этом в каком-то смысле разочарывающим: «великой простоты» получилось слишком мало. Добросовестный исследователь должен был указать на широкий круг возможностей, которые могли бы реализоваться, и затратить значительные умственные усилия на классификацию и систематизацию этих возможностей.

Для того, чтобы проиллюстрировать действительную неподатливость этой проблемы, позвольте рассказать вам об одной серьезной трудности, возникающей при ее анализе. Представим себе Европу 1970 г. в виде 17-секторного комплекса мультипликаторов и акселераторов, который является устойчивым, то есть мы можем показать, что все его характеристические корни являются демпфирующими и ослабляющими, а не антидемпфирующими и порождающими взрывную динамику. Теперь обратимся к истории и возьмем 1950 г. Коэффициенты модели Европы будут несколько другими, однако мы снова будем считать, что они порождают устойчивую систему. Теперь позвольте мне сообщить вам в точности один бит информации. В 1960 г., который лежит по-

середине, по чудесному совпадению оказалось, что коэффициенты модели во всех до единого случаях в точности равны средним арифметическим между коэффициентами 1950 и 1970 гг. Что бы вы сказали об устойчивости системы в 1960 г.?

Если мой вопрос не настроил вас на то, что вы столкнетесь с парадоксом, то я уверен, что вашим первым искушением было бы сказать, что это – устойчивая система, находящаяся на полпути от одной устойчивой системы к другой. Однако это не согласовывалось бы с результатами д-ра Эккауса. Парадокс получит объяснение, когда вы узнаете, что детерминантные условия устойчивости системы не определяют область устойчивости, задаваемую через соотношения между коэффициентами системы, как выпуклую (Samuelson, 1947, p.436). Следовательно, точка на полпути между двумя точками области может сама оказаться вне этой области. Такой ситуации не возникает в случае максимизирующих систем, которые «ведут себя хорошо».

Полагаю, что сказал достаточно, чтобы показать, что самой трудной частью моей книги «Основы экономического анализа» (Samuelson, 1947) было рассмотрение статики и динамики нематимизирующих систем.

ДИНАМИКА И МАКСИМИЗАЦИЯ

Естественно, из этого не следует, что с помощью максимизации нельзя исследовать широкую область динамических процессов. Так, например, рассмотрим динамический алгоритм нахождения вершины горы, который реализуется с помощью «градиентного метода». Его идея заключается в том, что ваша скорость в каком-либо направлении пропорциональна наклону горы в том же самом направлении. Нельзя рассчитывать, что такой метод приведет вас на высочайшую вершину Альп из любой начальной точки, находящейся в Европе. Однако он сходится к точке максимума любой вогнутой поверхности из тех, что фигурируют в школьных учебниках.

Подобно световым лучам в физике, о которых я говорил ранее, оптимальные траектории роста в теориях, выросших из новаторской работы Фрэнка Рамсея, появившейся более сорока лет тому назад (Ramsey, 1928), сами по себе демонстрируют богатство динамических явлений. Такая динамика совсем не похожа, скажем, на ту, которая составила предмет позитивного анализа связи акселератора с мультипликатором. Вы можете вспомнить, что сэр Уильям Гамильтон затратил много лет, пытаясь обобщить понятие комплексного числа на случай более чем двух измерений. Рассказывают, что его семья с сочувствием относилась к его исследованиям кватерниона, и каждый вечер дети приветствовали его по возвращении из астрономической обсерватории вопросом «Папа, ты умеешь перемножать свои кватернионы?» лишь для того, чтобы получить грустный ответ: «Я умею складывать мои кватернионы, но я не умею их перемножать». Если бы в 30-е годы Ллойд Метцлер и я имели детей, они бы каждый вечер спрашивали нас: «Все ли ваши характеристические корни вели себя хорошо и были устойчивы?» Ибо в те дни, находясь под впечатлением затянувшейся Американской Депрессии и ее нечувствительности к эфемерным государст-

венным дотациям, мы были в какой-то мере во власти догмы устойчивости.

Совершенно иными были мои главные интересы в течение 50-х годов, когда я занимался бесплодными поисками доказательства так называемой «теоремы о магистрали» (Samuelson, 1949a, 1960b, 1968a, 1968b; Samuelson and Solow, 1956; Dorfman, Samuelson and Solow, 1958). Здесь речь тоже идет о модели максимизации, по крайней мере, в смысле межвременной эффективности. Когда вы изучаете модель «затраты – выпуск» фон Неймана, вы сталкиваетесь с задачей нахождения минимакса или седловой точки, подобной той, которая рассматривается в его же теории игр. Это исключает возможность того, что ваши динамические характеристические корни будут демпфироваться. Так что, если бы мои дети не относились к моей научной работе с тем чувством, которое можно назвать «снисходительным пренебрежением», то в 50-е годы они должны были бы спрашивать меня: «Папа, образуют твои характеристические корни взаимно обратные или противоположные по знаку пары, соответствующие движению по цепной линии вокруг магистральной седловой точки?»

Могу ли я попросить вас о снисхождении? Позвольте мне отклониться от темы и рассказать один анекдот. Я делаю это с некоторым смущением, потому что, когда меня приглашали прочитать лекцию, профессор Лундберг предупредил, что это должна быть серьезная лекция. Хотя и говорят, что я был нахальным молодым человеком, у меня было только одно столкновение с великим Джоном фон Нейманом, который, конечно, был гигантом современной математики и, кроме того, проявил свою гениальность в работе над водородной бомбой, теорией игр и основами квантовой механики. Ради того, чтобы дать представление о его величии, я готов даже с еще большим бесстыдством бросить вызов профессору Лундбергу и рассказать вам анекдот в анекдоте. Кто-то однажды спросил великого йельского математика Какутани: «Вы великий математик?» Какутани скромно ответил: «О, вовсе нет. Я – рядовой трудяга, искатель истины». «Ну, если вы не великий математик, то кого бы вы назвали таковым?» – спросили его. Какутани думал, думал, а затем, как гласит предание, наконец, сказал: «Джонни фон Нейман».

И вот с этим Голиафом у меня произошло столкновение. Как-то, а это было примерно в 1945 г., фон Нейман читал лекцию в Гарварде о своей модели общего равновесия. Он заявил, что в ней используется новый математический аппарат, не связанный с традиционным математическим аппаратом физики и теорией экстремумов. Я подал голос из задних рядов, сказав, что это вовсе не отличается от понятия границы издержек упущенной выгоды, используемого в экономической теории, когда при фиксированных количествах всех ресурсов и всех, кроме одного, продуктов общество стремится максимизировать объем выпуска остающегося продукта. Фон Нейман отреагировал на это с быстротой молнии, что было для него характерным: «Вы можете держать пари на одну сигару?» К стыду своему, должен сказать, что в тот раз маленький Давид, поджав хвост, бежал с поля боя. И все же когда-нибудь, когда я войду в ворота Святого Петра, я думаю, что половина сигары мне достанется, но только половина, потому что точка зрения фон Неймана также была обоснованной.

Беглый просмотр современных журналов и учебников показывает, что, в то время как студент, изучающий классическую механику, часто сталкивается со случаями колебаний около положения равновесия (например, маятника), студент-экономист чаще имеет дело с движениями по цепной линии около седловой точки: подобно тому, как канат, подвешенный на двух гвоздях, принимает форму цепной линии, выпуклой в сторону земли, так и экономические движения совершаются вдоль цепной линии, выпуклой в сторону магистрали. Я хотел бы здесь напомнить о происхождении слова «магистраль» (turnpike). Все американцы привыкли к тому, что если нужно попасть из Бостона в Лос-Анджелес, то лучше всего побыстрее доехать до главной магистрали и только в конце вашего путешествия нужно свернуть с нее к пункту назначения. Так же и в экономике: для того чтобы обеспечить наиболее эффективное развитие страны, при определенных обстоятельствах следует как можно быстрее вступить на путь максимального и сбалансированного роста, так сказать, «оседлать» эту магистраль, а затем, по окончании, например, 20-летнего периода, свернуть к конечной цели развития. Здесь мы сталкиваемся с интересным эффектом: когда горизонт становится *широким*, вы проводите *большую* часть вашего времени в пределах *малого* расстояния от магистрали. Все, больше я не буду произносить это слово, на котором можно сломать язык.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Я был не в состоянии дать в одной лекции хотя бы самое поверхностное представление о роли принципов максимума в экономическом анализе. Не смог я составить и репрезентативную выборку из моих собственных интересов в экономической науке или хотя бы в более узкой области, каковой является теория максимизации. Так, одним из предметов моего непреходящего внимания на протяжении ряда лет была «экономика благосостояния». Вместе с моим близким другом Абрамом Бергсоном из Гарварда я пытался понять, о максимизации чего можно вести речь, говоря о «невидимой руке» Адама Смита. Например, рассмотрим понятие, которое мы сегодня называем «оптимальностью по Парето» и которое с тем же основанием можно было бы назвать «оптимальностью по Бергсону», – ведь он в 1938 г. вложил ясный смысл в то, что Парето лишь нащупывал, и связал это узкое понятие с более широким понятием социальных норм и функций благосостояния (Bergson, 1938). Как раз недавно я читал статью одного автора из «новых левых». Она написана белым стихом, который, как выяснилось, в высшей степени неэффективен как средство общения, но который истинный ученый должен осилить, если этого требуют интересы науки. Автор подверг уничтожающей критике понятие оптимальности по Парето. Однако когда я переварил его труд, мне показалось, что именно в обществе, достигшем изобилия, где диссидентские группы добиваются возможности вести свой собственный образ жизни, особенно важной становится позиция «дать людям, что *они* хотят». Автор из поколения «старых левых», занимавшийся социалистической экономикой, призванной удовлетворить потребности людей на грани прожиточного минимума, конечно, в меньшей степени нуждался в понятии опти-

мальности по Парето, чем современный исследователь общественных процессов в США и Швеции.

Кроме того, особое удовлетворение принесло мне то, что мои работы по экономике благосостояния (Samuelson, 1954, 1955, 1969) позволили пролить свет на проблему анализа общественных благ, поставленную еще Кнутом Викселлем (Wicksell, 1896) и Эриком Линдалем (Lindahl, 1919).

Американский экономист Г.Давенпорт, от которого нас отделяют два поколения (он был лучшим другом Торстена Веблена, и Веблен даже некоторое время жил в угольном подвале его дома), однажды сказал: «Нет причины, почему экономическая теория должна быть монополией реакционеров». Всю свою жизнь я стремился принимать эти слова близко к сердцу и сегодня осмеливаюсь повторить их здесь, в расчете на ваше сочувственное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

- Alchian A.** Uncertainty, Evolution and Economic Theory // Journal of Political Economy, 1950, v. 58, p.211–221.
- Antonelli G.B.** Teoria matematica della economica politica. Pisa, 1886.
- d'Aspo A.** Decline of Mechanism. Princeton, 1939.
- Bergson (Burk) A.** A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics // Quarterly Journal of Economics, February 1938, v.52, p.310–334.
- Dorfman R., Samuelson P.A., and Solow R.M.** Linear Programming and Economic Analysis. N.Y., 1958.
- Eckaus R.S.** Dynamic Models of Domestic and International Trade. Unpublished doctoral dissertation. MIT, 1954.
- Fisher I.** Mathematical Investigation in the Theory of Value and Prices. New Haven (Conn.), 1925.
- Georgescu-Roegen N.** The Pure Theory of Consumer's Behavior // Quarterly Journal of Economics, August 1936, v.50, p.545–593.
- Harrod R.E.** The Trade Cycle. Oxford, 1936.
- Hicks J.R. and Allen R.G.D.** A Reconsideration of the Theory of Value // *Economica*; Part 1: February 1934, v.14, p.52–76; Part 2: May 1934, v.14, p.196–219.
- Hotelling H.** Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions // Journal of Political Economy, v.40, October 1932, p.577–616.
- Houthakker H.S.** Revealed Preference and the Utility Function // *Economica*, May 1950, v.17, p.159–174.
- Jeffreys H.** Theory of Probability. Oxford, 1939.
- Johnson W.E.** The Pure Theory of Utility Curves // *Economic Theory*, December 1913, v.23, p.483–513.
- Keynes J.M.** A Treatise on Probability. L., 1921.
- Lerner D. (ed.)** Cause and Effect. N.Y., 1965.
- Lindahl E.** Die Gerechtigkeit der Besteuerung. Lund, 1919.
- Lundberg E.** Studies in the Theory of Economic Expansion. L., 1937.
- Pareto V.** Manuele di economia politica. Milan, 1907.
- Pareto V.** Manuel d'economie politique. P., 1909.
- Parsons T.** Structure of Social Action. 2d ed. Glencoe (Ill.), 1949.
- Ramsey F.P.** A Mathematical Theory of Saving // *Economic Journal*, December 1928, v.38, p.543–549.

- Ramsey F.P.** Foundations of Mathematics and other Logical Essays. L., 1931.
- Samuelson P.A.** A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior // *Economica*, August 1938(a), v.5, p.353–354.
- Samuelson P.A.** The Empirical Implications of Utility Analysis // *Econometrica*, October 1938(b), v.6, p.344–356.
- Samuelson P.A.** A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier // *Journal of Political Economy*, December 1939, v.47, p.786–797.
- Samuelson P.A.** Foundations of Economic Analysis. Cambridge (Mass.), 1947.
- Samuelson P.A.** Consumption Theory in Terms of Revealed Preference // *Econometrica*, November 1948, v.15, p.243–253.
- Samuelson P.A.** Market Mechanisms and Maximization. Part III. Rand Corporation, June 29, 1949a.
- Samuelson P.A.** The Le Chatelier Principle in Linear Programming. Rand Corporation, August 4, 1949b.
- Samuelson P.A.** The Problem of Integrability in Utility Theory // *Economica*, November 1950, v.17, p.355–385.
- Samuelson P.A.** Consumption Theorems in Terms of Overcompensation rather than Indifference Comparisons // *Economica*, February 1953, v.20, p.1–9.
- Samuelson P.A.** The Pure Theory of Public Expenditure // *Review of Economic Statistics*, November 1954, v.36, p.387–389.
- Samuelson P.A.** Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure // *Review of Economic Statistics*, November 1955, v.37, p.35–56.
- Samuelson P.A.** Frank Knight's Theorem in Linear Programming // *Zeitschrift für National-Ökonomie*, August 1958, v.18, p.310–317.
- Samuelson P.A.** An Extension of the LeChatelier Principle // *Econometrica*, April 1960a, v.28, p.368–379.
- Samuelson P.A.** Efficient Paths of Capital Accumulation in Terms of the Calculus of Variation. In: K.J.Arrow et al. (eds.) *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959. Stanford, 1960b.
- Samuelson P.A.** Structure of a Minimum Equilibrium System. In: R.W.Pfouts (ed.) *Essays in Economics and Econometrics: A Volume in Honor of Harold Hotelling*. Chapel Hill (N.C.), 1960c.
- Samuelson P.A.** The Two-Part Golden Rule Deduced as the Asymptotic Turnpike of Catenary Motions // *Western Economic Journal*, March 1968(a), v.6, p.85–89.
- Samuelson P.A.** The Reciprocal Characteristic Root Property of Discrete-Time Maxima // *Western Economic Journal*, March 1968(b), v.6, p.90–93.
- Samuelson P.A.** Pure Theory of Public Expenditure and Taxation. In: J.Margolis and H.Guitton (eds.) *Public Economics*. N.Y., 1969.
- Samuelson P.A.** Stochastic Speculative Price // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.*, February 1971, v.68, p.335–337.
- Samuelson P.A. and Solow R.M.** A Complete Capital Model Involving Heterogeneous Capital Goods // *Quarterly Journal of Economics*, March 1956, v.70, p.537–562.
- Schultz H.** Theory and Measurement of Demand. Chicago, 1938.
- Schumpeter J.A.** The Common Sense of Econometrics // *Econometrica*, January 1933, v.1, p.5–12.
- Slutsky E.** Sulla teoria del bilancio del consumatore // *Giornale degli Economicisti*, 1915, No.51, p.19–23.
- Stiglitz J.E.(ed.)** The Collected Scientific Papers by Paul A.Samuelson. 2 vols. Cambridge (Mass.), 1965–1966.
- Wicksell K.** Finanztheoretische Untersuchungen. Jena, 1896.